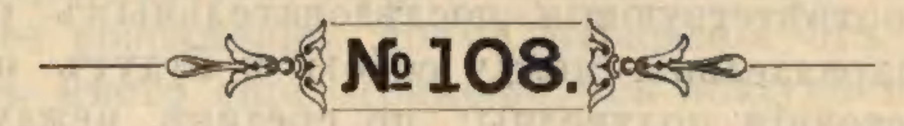
# ВѢСТНИКЪ
# ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



**№ 108.**

IX Сем. 11 Декабря 1890 г. № 12.

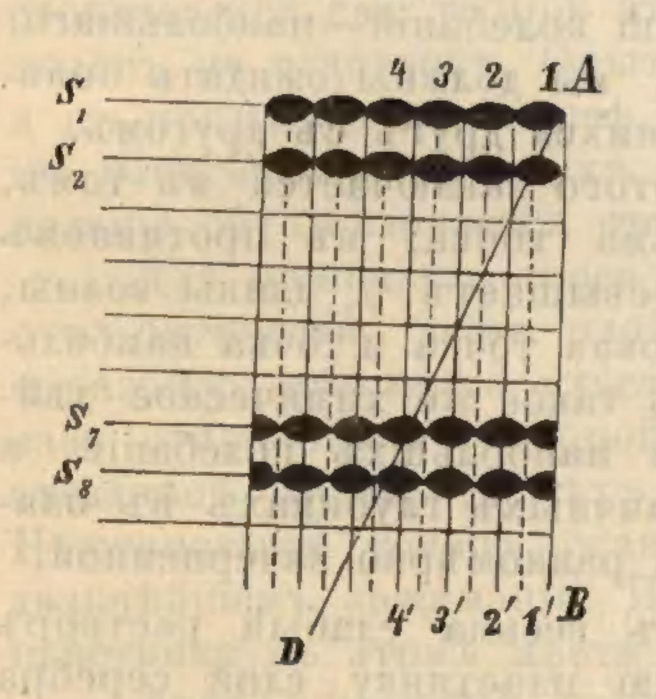
## СТОЯЧІЯ СВѢТОВЫЯ ВОЛНЫ

### и направленіе колебаній поляризованнаго луча.

Подъ этимъ заглавіемъ появилась въ настоящемъ году въ журналѣ Wiedemann'a*) статья O. Wiener'a, въ которой онъ излагаетъ свой пріемъ для изслѣдованія стоячихъ свѣтовыхъ волнъ и результаты, полученные имъ помощью этого пріема.

Чтобы выяснить сущность пріема Wiener'a, приведемъ слѣдующее разсужденіе: представимъ себѣ, что на нѣкоторое зеркало, которое вообразимъ перпендикулярнымъ къ плоскости рисунка, при чемъ линія AB (фиг. 35) представляетъ линію пересѣченія зеркала и плоскости рисунка, падаетъ пучекъ параллельныхъ лучей, перпендикулярно къ зеркалу. Отразившись отъ зеркала, каждый лучъ пойдетъ по своему первоначальному пути, но въ направленіи прямо противоположномъ. Взаимодѣйствіе падающаго и отраженнаго луча обусловитъ при этомъ явленіе, извѣстное подъ названіемъ стоячихъ волнъ и заключающееся въ въ слѣдующемъ: если при отраженіи фаза колебаній мѣняется, то въ точкѣ отраженія, т. е. непосредственно на зеркалѣ, колебанія падающаго и отраженнаго луча будутъ идти по направленіямъ противоположнымъ другъ другу и взаимно уничтожатся, значитъ здѣсь будетъ minimum колебаній или узелъ. На разстояніи $^1/_4$ длины волны отъ зеркала, разность хода падающаго и отраженнаго лучей будетъ равна одной волнѣ, слѣд. колебанія падающаго и отраженнаго луча будутъ идти по одному направленію и усилитъ другъ друга—здѣсь будетъ maximum колебанія. На разстояніи $^2/_4$ длины волны отъ зеркала будетъ снова узелъ и т. д. Вообще если фаза колебанія мѣняется при отраженіи, то узлы будутъ на разстояніяхъ отъ зеркала, выраженныхъ цѣлымъ числомъ половинъ длины волны, и maxi-

Фиг. 35.




*) Wied. An. 1890, № 6.

та колебаній на разстояніяхъ отъ зеркала, равныхъ нечетному числу четвертей длины волны. Если фаза колебаній при отраженіи не мѣняется, то явленіе будетъ обратное. Графически первое явленіе представляютъ на чертежѣ лучи $S_1$ и $S_2$, а второе лучи $S_7$ и $S_8$. Если зеркало совершенно плоское, то всѣ узловыя точки, соотвѣтствующія одному разстоянію отъ зеркала, будутъ лежать въ одной плоскости. Плоскости, заключающія узловыя точки, соотвѣтствующія послѣдовательнымъ разстояніямъ отъ зеркала, будутъ параллельны между собою и будутъ находиться другъ отъ друга на разстояніи полуволны; по срединѣ между каждыми двумя изъ нихъ будутъ находиться плоскости, соотвѣтствующія maximis колебаній. На чертежѣ сѣченіе перваго ряда плоскостей съ плоскостью рисунка представленно прямыми 1′, 2′, 3′......, второго ряда—прямыми 1, 2, 3..... для случая, когда фаза колебаній при отраженіи мѣняется; для второго случая будетъ наоборотъ.

Если теперь пересѣчемъ оба ряда плоскостей нѣкоторой плоскостью, наклонной къ зеркалу и перпендикулярной къ плоскости рисунка, (на чертежѣ эта плоскость представится линіей AD), то сѣченія ея съ плоскостями узловыхъ точекъ и maximorum колебаній, дадутъ два ряда линій (на чертежѣ точекъ)—одинъ—рядъ узловыхъ линій, другой—рядъ линій наибольшихъ колебаній.

Если все вышеописанное выполнить на дѣлѣ т. е. заставить падать на зеркало, перпендикулярно къ нему, пучекъ параллельныхъ лучей и помѣстить наклонно къ зеркалу прозрачную и чувствительную къ свѣту пластинку, наприм. фотографическую, то явленіе будетъ происходитъ вышеописаннымъ образомъ, и мы должны ожидать, если сточія свѣтовыя волны существуютъ, на узловыхъ линіяхъ наименьшаго дѣйствія свѣта на пластинку, а на линіяхъ maximorum колебаній—наибольшаго, т. е., въ случаѣ фотографической пластинки, мы должны ожидать появленія свѣтлыхъ и темныхъ полосъ, чередующихся другъ съ другомъ.

Но первое и главнѣйшее условіе для этого заключается въ томъ, чтобы чувствительная пластинка была весьма тонка; въ противномъ случаѣ, если напр. пластинка по толщинѣ превышаетъ $^1/_2$ длины волны, то по толщинѣ ея будутъ имѣть мѣсто и узловая точка и точка наибольшаго колебанія волны; послѣдняя обусловитъ такое же химическое дѣйствіе на пластинку, какъ на сосѣдней линіи наибольшхъ колебаній, и хотя разложеніе будетъ происходитъ на различныхъ глубинахъ въ пластинкѣ, но наблюдателю она будетъ казаться равномѣрно зачерненной.

Wiener для своихъ изслѣдованій, взявъ весьма слабый растворъ хлористаго серебра, наносилъ на стеклянную пластинку слой серебра толщиною около $^1/_{30}$ длины волны желтаго свѣта натрія; такой слой былъ вполнѣ прозраченъ, былъ вполнѣ чувствителенъ къ свѣту и не представлялъ описаннаго неудобства.

Самый опытъ производился слѣдующимъ образомъ: зеркаломъ служила посеребренная и хорошо отполированная стеклянная пластинка, пластинка съ чувствительнымъ слоемъ прижималась однимъ концемъ къ зеркальной пластинка, вслѣдствіе чего онѣ располагались подъ весьма малымъ угломъ другъ къ другу; послѣ этого ихъ скрѣпляли другъ съ другомъ помощью Менделѣевской замазки.

Когда на такую пару былъ пущенъ пучекъ параллельныхъ лучей,

и затѣмъ пластинки были отдѣлены одна отъ другой, то на чувствительномъ слоѣ, послѣ проявленія, оказался рядъ темныхъ полосъ, чередующихся со свѣтлыми. Такое явленіе, на основаніи вышеприведеннаго разсужденія, указываетъ на существованіе стоячихъ волнъ: свѣтлыя полосы соотвѣтствуютъ minimis химическаго дѣйствія свѣта, т. е., линіямъ узловыхъ точекъ, темныя—maximis, т. е. линіямъ наибольшихъ колебаній.

Противъ убѣдительности этого опыта можно сдѣлать, говоритъ Wiener, слѣдующее возраженіе: кромѣ отраженія отъ серебрянаго зеркала должно имѣть мѣсто еще отраженіе отъ воздуха въ чувствительной пластинкѣ; лучи, отраженные отъ серебрянаго зеркала и отъ воздуха, будутъ интерферировать между собою и дадутъ для однихъ мѣстъ чувствительной пластинки лучи большаго напряженія, для другихъ—меньшаго; но химическое дѣйствіе на чувствительную пластинку обусловливается лучемъ падающимъ, который имѣетъ вездѣ одинаковое напряженіе, + лучемъ интерфенціоннымъ, который для разныхъ мѣстъ пластинки, соотвѣтствующихъ различнымъ разстояніямъ отъ зеркала, имѣетъ различное напряженіе. При такихъ условіяхъ химическое дѣйствіе свѣта будетъ различно для различныхъ мѣстъ пластинки, и мы должны получить полосы, чередующіяся попеременно по своей яркости, но эти полосы будутъ обусловлены обыкновенной интерференціей.

Чтобы устранить это возраженіе Wiener заполнилъ пространство между пластинками бензоломъ. Показатель преломленія стекла, чувствительной пластинки и бензола почти одинаковъ (1,50—1,53), такъ что среда до серебрянаго зеркала является оптически однородной, вслѣдствіе этого разсмотрѣнная выше обыкновенная интерференція не будетъ при такихъ условіяхъ опыта имѣть мѣста. Если появленіе полосъ обусловливается ею, то при этихъ условіяхъ опыта мы не должны ожидать полосъ на пластинкѣ. Опытъ показалъ противное—на пластинкѣ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, появляется, послѣ дѣйствія перпендикулярно къ пластинкѣ падающихъ лучей, рѣзко очерченныя полосы—значитъ, явленіе обусловливается стоячими волнами.

Для рѣшенія вопроса объ измѣненіи фазы колебанія при отраженіи отъ оптически болѣе плотной среды, Wiener поступалъ слѣдующимъ образомъ: стеклянная пластинка съ чувствительнымъ слоемъ прижималась стороной, на которой былъ нанесенъ слой, къ слегка выпуклой стеклянной линзѣ, до тѣхъ поръ пока центръ образующихся при этомъ Ньютоновыхъ колецъ становился темнымъ и оставался темнымъ при дальнѣйшемъ нажиманіи. Послѣднее служило доказательствомъ того что, пластинка въ этомъ мѣстѣ дѣйствительно прикасается къ линзѣ.

Лучъ, падающій перпендикулярно на такую систему, отражается въ слоѣ воздуха отъ линзы и отраженный лучъ даетъ съ падающимъ стоячія волны. При этомъ можетъ быть два случая: 1) фаза колебанія мѣняется, 2)—не мѣняется.

Въ 1-мъ случаѣ въ мѣстѣ отраженія, т. е. на поверхности линзы будутъ имѣть мѣсто узловыя точки, а слѣдовательно въ тѣхъ частяхъ чувствительнаго слоя, которыя находятся непосредственно возлѣ поверхности линзы (для даннаго случая это будутъ точки соотвѣтствующія темной центральной части Ньютоновыхъ колецъ) должно имѣть мѣсто наименьшее дѣйствіе свѣта, и мы должны получить въ этомъ мѣстѣ

свѣтлое пятно, а около него рядъ концентрическихъ съ нимъ колецъ, попеременно темныхъ и свѣтлыхъ. Во второмъ случаѣ мы должны наблюдать обратное явленіе: центръ колецъ долженъ выйти темнымъ. Опытъ показалъ первое, значитъ фаза колебаній при отраженіи отъ оптически болѣе плотной среды мѣняется.

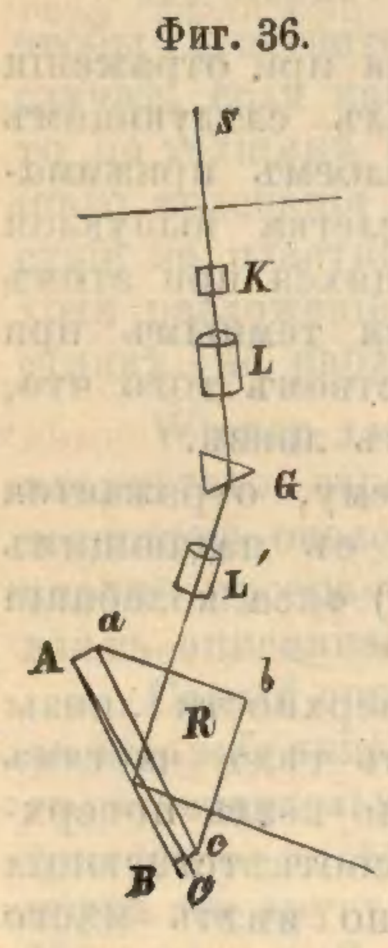
Для рѣшенія вопроса о направленіи колебаній прямолинейнаго поляризованнаго луча Wiener разсуждаетъ слѣдующимъ образомъ: вообразимъ пучекъ прямолинейно поляризованнаго свѣта, падающій на зеркало подъ угломъ въ 45°; если при этомъ колебанія падающаго луча перпендикулярны къ плоскости паденія, т. е., параллельны зеркалу, то колебанія отраженнаго луча будутъ также параллельны зеркалу, а слѣдовательно и колебаніямъ падающаго луча. Вслѣдствіе этого пересѣкающіеся лучи падающаго и отраженнаго пучка должны интерферировать между собою и смотря по разности хода, будутъ то усиливать, то ослаблять другъ друга. Въ этомъ случаѣ, какъ и при нормальномъ паденіи, должна происходить перемѣна результирующаго напряженія отъ одного мѣста къ другому съ измѣненіемъ разстоянія отъ зеркала.

Иное дѣло, если колебанія падающаго подъ угломъ въ 45° луча происходятъ въ плоскости паденія. Въ этомъ случаѣ колебанія отраженнаго луча происходятъ въ той же плоскости, но будутъ перпендикулярны къ первымъ.

При пересѣченіи падающаго и отраженнаго лучей, перпендикулярныя другъ къ другу колебанія сводятся къ одному, но интерференція, при которой происходило бы усиленіе или ослабленіе свѣта, не будетъ имѣть мѣста. Результирующее напряженіе свѣта будетъ постоянно равно геометрической суммѣ перпендикулярныхъ другъ къ другу слагающихъ напряженій, какова бы ни была разность хода лучей. Въ этомъ случаѣ результирующее напряженіе луча будетъ во всѣхъ мѣстахъ одинаково, не зависимо отъ разстоянія ихъ отъ зеркала.

Если вблизи отъ зеркала, наклонно къ нему, помѣстить чувствительную пластинку, то въ первомъ случаѣ на ней должны появиться полосы попепремѣнно темныя и свѣтлыя, въ 2-мъ нѣтъ. Самый опытъ Wiener расположилъ слѣдующимъ образомъ: лучъ (фиг. 36), идущій изъ щели S проходилъ черезъ кристаллъ исландскаго шпата K и раздѣлялся здѣсь на два прямолинейно паляризованныхъ луча—обыкновенный и необыкновенный; далѣе оба луча шли черезъ ахроматическую систему линзъ L и по выходѣ изъ нея попадали на призму G, которая разлагала и отклоняла каждый изъ лучей. Затѣмъ оба разложенные луча проходили опять черезъ ахроматическую линзу L′ и попадали на призму R прямоугольную и равнобедренную. Призма R располагалась такимъ образомъ, чтобы лучи падали на поверхность *ab* перпендикулярно къ ней, тогда на плоскость *ac* они падали подъ угломъ въ 45°. Параллельно къ *ac* располагалось зеркало AB, а передъ нимъ пластинка съ чувствительнымъ слоемъ AC. Пространство между гранью призмы *ac* и пластинкой AC,

Фиг. 36.



между AC и AB заполнялось бензоломъ; такимъ образомъ система изъ призмы и пары была оптически почти однородна; лучъ, войдя въ призму безъ преломленія, доходилъ до зеркала AB, падалъ и отражался отъ него, вслѣдствіе параллельности AB и *ac*, подъ угломъ въ 45°. Исландскій шпатъ располагался такимъ образомъ, чтобы спектры обыкновеннаго и необыкновеннаго лучей, полученные помощью призмы G, приходились на пластинкѣ одинъ подъ другимъ, а система KABC такъ, чтобы плоскость поляризаціи одного луча была параллельна плоскости паденія на AB,—другая перпендикулярна. Такія условія опыта совершенно соотвѣтствовали двумъ случаямъ выше приведеннаго разсужденія.

Когда при такихъ условіяхъ былъ произведенъ опытъ, то оказалось, что полосы появились на половинѣ пластинки соотвѣтствующей тому лучу, плоскость поляризаціи котораго была параллельна плоскости паденія его на AB; на другой половинѣ, соотвѣтствующей лучу, плоскость поляризаціи котораго была перпендикулярна къ плоскости паденія, полосъ не было.

На основаніи вышеприведеннаго разсужденія такое явленіе указываетъ на то, что колебанія прямолинейно поляризованнаго луча происходятъ въ плоскости, перпендикулярной къ плоскости поляризаціи. Въ заключеніе остается замѣтить, что всѣ вышеприведенныя разсужденія и заключенія справедливы по отношенію къ свѣтовымъ колебаніямъ, если справедливо предположеніе, что колебанія свѣтовыя и химическія тождественны. *I. Косоноговъ* (Кіевъ).

---

# ПАРАЛЛЕЛЬ, СУЩЕСТВУЮЩАЯ МЕЖДУ

## опредѣленіями, свойствами и формулами ариѳметической и геометрической прогрессій.

Если въ опредѣленіяхъ, свойствахъ и формулахъ для *ариѳметической* прогрессіи замѣнимъ *сложеніе умноженіемъ*, *вычитаніе—дѣленіемъ уменьшаемаго на вычитаемое*, *умноженіе—возведеніемъ множимаго въ степень, равную множителю*, *дѣленіе—извлеченіемъ изъ дѣлимаго корня степени, равной дѣлителю*, то получимъ извѣстныя опредѣленія, свойства и формулы для *геометрической* прогрессіи.

Въ самомъ дѣлѣ:

a) *Ариѳметическою* прогрессіею, какъ извѣстно, называется такой рядъ чиселъ (называемыхъ членами прогрессіи), въ которомъ *разность* между каждымъ членомъ и предыдущимъ есть величина постоянная. Стоитъ только въ этомъ опредѣленіи замѣнить слово „*разность*“ словомъ „*отношеніе*“, тогда получится извѣстное опредѣленіе геометрической прогрессіи: *геометрическою* прогрессіею называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ *отношеніе* каждаго члена къ предыдущему есть величина постоянная.

b) Всякіе три рядомъ стоящіе члена *ариѳметической* прогрессіи составляютъ непрерывную *ариѳметическую* пропорцію, т. е. всякій членъ этой прогрессіи есть среднее *ариѳметическое* двухъ членовъ, между которыми онъ находится. Произведя указанную раньше замѣну, получимъ извѣстное свойство членовъ геометрической прогрессіи: всякіе три ря-

домъ стоящіе члена *геометрической* прогрессіи составляютъ непрерывную *геометрическую* пропорцію, т. е. всякій членъ этой прогрессіи есть среднее *геометрическое* двухъ членовъ, между которыми онъ находится. Выводъ этихъ свойствъ для обѣихъ прогрессій вполнѣ одинаковъ, конечно, при условіи указанной раньше своевременной замѣны дѣйствій.

c) Всякій членъ *ариѳметической* прогрессіи равенъ первому члену, *сложенному съ разностью* прогрессіи (*разность* прогрессіи можетъ быть цѣлое, дробное, положительное или отрицательное число), *умноженною* на число членовъ, предшествующихъ данному члену.

Назвавъ первый членъ ариѳметической прогрессіи черезъ $a$, $n$-ый членъ черезъ $u$, разность прогрессіи черезъ $r$, получимъ извѣстную формулу:

$$u=a+r(n-1) \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

Назвавъ первый членъ геометрической прогрессіи черезъ $a$, $n$-ый членъ черезъ $u$, знаменатель прогрессіи черезъ $q$ и сдѣлавъ въ формулѣ (1) указанную раньше замѣну дѣйствій, получимъ аналогичную формулу для геометрической прогрессіи:

$$u=aq^{n-1} \quad \dots\dots\dots\dots (1')$$

т. е. всякій членъ *геометрической* прогрессіи равенъ первому члену, *умноженному* на *знаменатель* прогрессіи (*знаменатель* прогрессіи можетъ быть цѣлое, дробное, положительное или отрицательное число), *возведенный въ степень* числа членовъ, предшествующихъ данному члену.

Выводы обѣихъ формулъ также вполнѣ аналогичны.

Приведенныхъ трехъ примѣровъ достаточно для того, чтобы понять, какимъ образомъ изъ остальныхъ свойствъ и формулъ для членовъ ариѳметической прогрессіи получить аналогичныя свойства и формулы геометрической прогрессіи.

Такъ, напримѣръ, извѣстно, что *сумма* членовъ *ариѳметической* прогрессіи, равноудаленныхъ отъ концовъ прогрессіи, есть величина постоянная, равная *суммѣ* крайнихъ членовъ;—для геометрической прогрессіи аналогичное свойство будетъ слѣдующее: *произведеніе* членовъ *геометрической* прогрессіи, равноудаленныхъ отъ концовъ прогрессіи, есть величина постоянная, равная *произведенію* крайнихъ членовъ. Выводы обоихъ свойствъ опять одинаковы. Если къ прежнимъ обозначеніямъ прибавимъ слѣдующія:

$S_n$—сумма $n$ членовъ прогрессіи,

$P_n$—произведеніе $n$ членовъ прогрессіи, то получимъ для ариѳметической прогрессіи слѣдующія формулы:

$$S_n=\frac{(a+u)n}{2} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$S_n=\frac{[a+a+r(n-1)]n}{2}=\frac{[a.2+r(n-1)]n}{2} \quad \dots\dots (3)$$

Для геометрической прогрессіи, послѣ указанной замѣны дѣйствій, получимъ слѣдующія аналогичныя формулы:

$$P_n = \pm\sqrt{(au)^n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2')$$

$$P_n = \pm\sqrt{(a^2q^{n-1})^n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3')$$

Знакъ (—) можетъ получиться въ случаѣ знакоперемѣнной геометрической прогрессіи. Затѣмъ, чтобы между двумя числами $a$ и $b$ вставить $m$ такъ называемыхъ среднихъ *ариѳметическихъ*, нужно найти *разность* искомой *ариѳметической* прогрессіи,—эта *разность*, какъ извѣстно, выражается такъ:

$$r = \frac{b-a}{m+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

При рѣшеніи подобной-же задачи для геометрической прогрессіи ищется *знаменатель* прогрессіи, для котораго аналогичная формула будетъ такая:

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4')$$

Фурмула для суммы членовъ геометрической прогрессіи

$$\left( S_n = \frac{uq-a}{q-1} \text{ или } \frac{a(q^n-1)}{q-1} \right),$$

очевидно, не можетъ быть получена изъ формулъ ариѳметической прогрессіи, поэтому и выводъ ея не имѣетъ себѣ подобнаго въ выводахъ формулъ ариѳметической прогрессіи.

---

Члены всякой ариѳметической прогрессіи можно принять за логариѳмы (при извѣстномъ основаніи логариѳмовъ) чиселъ, которыя въ свою очередь, представляютъ геометрическую прогрессію; а члены всякой знакопостоянной геометрической прогрессіи будутъ имѣть своими логариѳмами числа, которыя представятъ ариѳметическую прогрессію. Если къ этому замѣчанію прибавить, что логариѳмъ *произведенія* равенъ *суммѣ* логариѳмовъ множителей, логариѳмъ *частнаго* равенъ *разности* между логариѳмами дѣлимаго и дѣлителя, логариѳмъ степени равенъ и т. д., то станетъ вполнѣ понятной зависимость, существующая между формулами геометрической и ариѳметической прогрессій.

Въ предыдущемъ разсужденіи *для общности* не исключена знакоперемѣнная геометрическая прогрессія, такъ какъ формулы для нея тѣ же, что и для знакопостоянной, только въ формулахъ произведенія членовъ прогрессіи пришлось поставить двойной знакъ.

*С. Чемолосовъ* (Винница).

---

## О ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА.

Во всѣхъ учебникахъ Геометріи (Давидовъ, Буссе, Леве и др.) при выводѣ выраженія площади треугольника по тремъ сторонамъ прежде

всего составляется уравненіе, опредѣляющее высоту треугольника, а затѣмъ находится выраженіе площади. Возможно, принявъ за неизвѣстное площадь треугольника, составить уравненіе прямо опредѣляющее площадь.

Пусть $a$, $b$ и $c$ стороны $\triangle$-ка ABC. Возьмемъ въ треугольникѣ наибольшій уголъ A и изъ вершины его опустимъ высоту AD. Означимъ площадь треугольника ABC чрезъ $x$. Тогда

$$AD=\frac{2x}{a}.$$

По теоремѣ Пиѳагора отрѣзки основанія BD и DC выразятся такъ

$$BD=\sqrt{c^2-\frac{4x^2}{a^2}}$$

и

$$DC=\sqrt{b^2-\frac{4x^2}{a^2}}.$$

Такъ какъ $BD+DC=a$, то имѣемъ уравненіе

$$\sqrt{c^2-\frac{4x^2}{a^2}}+\sqrt{b^2-\frac{4x^2}{a^2}}=a,$$

которое по освобожденіи отъ радикаловъ приметъ видъ

$$(a^2+b^2-c^2)^2=4a^2b^2-16x^2.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ

$$x=\tfrac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}.$$

Разлагая подкоренную величину на множители, получимъ извѣстное выраженіе площади треугольника

$$x=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a-b+c)}.$$

*Н. Николаевъ* (Пенза).

## ЗАДАЧИ.

**№ 145.** Найти построеніемъ сумму убывающаго безконечнаго ряда

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots.,$$

въ которомъ каждый послѣдующій членъ представляетъ большій отрѣзокъ предыдущаго, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

*Ш.*

**№ 146.** Построить трапецію по тремъ ея даннымъ сторонамъ, если извѣстно, что въ нее можно вписать кругъ. *М. Чубинскій* (Ворон.)

**№ 147.** По даннымъ разстояніямъ основаній трехъ биссекторовъ внутреннихъ угловъ треугольника (отъ его сторонъ), вычислить его площадь и стороны. *Н. Николаевъ* (Пенза).

**№ 148.** Черезъ данную точку A провести сѣкущую, опредѣляющую въ двухъ данныхъ окружностяхъ двѣ равныя хорды.
(Заимств.) *И. Александровъ* (Тамбовъ).

**№ 149.** Черезъ данныя двѣ точки въ пространствѣ провести плоскость такъ, чтобы она дѣлила данный двугранный уголъ на два равные трегранные угла. *В. Ермаковъ.*

**№ 150.** Черезъ двѣ данныя точки въ пространствѣ провести двѣ плоскости такъ, чтобы онѣ на каждой изъ двухъ данныхъ плоскостей отсѣкали прямой уголъ. *В. Ермаковъ.*

---

## Упражненія для учениковъ.

Упростить:

1) $$\frac{\left\{1+\frac{2b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right\}\left\{a^3b-a^2b^3\right\}}{(a+b)\left\{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right\}b}\cdot\frac{\left\{\frac{a^2+b^2}{b}-a\right\}:\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}{(a^3+b^3):(a^2-b^2)}$$ Отв.: $a^2b^2$.

2) $$\frac{\frac{4mn}{m+n}+2m}{\frac{4mn}{m+n}-2m}+\frac{\frac{4mn}{m+n}+2n}{\frac{4mn}{m+n}-2n}-\frac{2m^2-n^2}{m^2}=?$$ Отв.: $\left(\frac{n}{m}\right)^2$.

3) $$\frac{\left(\frac{1}{m}-n\right)\frac{m^2-4n^2}{2mn-4mn^2}}{m\,\frac{(1-mn)^2}{2m^3n-2m^4n^2}}:\frac{\left(1+\frac{2n}{m}\right)\left\{1-\left(\frac{n}{m}-\frac{n^2}{m^2}\right)\right\}}{m^2\left\{1-\frac{n^3}{m^3}\right\}(m-n)}=?$$ Отв.: $(m-n)^2$.

4) $$\left\{\frac{\frac{b^0}{a^{-2}}+\frac{b^2}{a^0}}{-(b^{-1}-a^{-1})}:\left(\frac{b}{a^{-3}}+\frac{a}{b^{-3}}\right)\right\}:(a+b)=?$$ Отв.: $\{b^2-a^2\}^{-1}$.

5) $$\frac{2a}{a^2(2a+1)-\frac{a^2}{1-\frac{3a}{3a-\frac{2}{a}}}}:a^{-3}\left\{1+\frac{3}{4}a\right\}^{-1}=?$$ Отв.: $a$.

6) $\left\{a^{-2}+b^{-2}+\frac{2a^0b^0}{\frac{b}{a^{-1}}+\frac{b}{b^{-1}}}(a^{-1}b+1)\right\}:\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{-2}\cdot(a^mb^n)^0=?$ Отв.: 1.

7) $\frac{\frac{(ax)^{-1}}{(a+x)^{-2}}-2^2}{\left\{\frac{(a-x)^2}{ax}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right\}^{-1}}:\frac{a^2x\left\{1-\left(\frac{a}{x}\right)^{-2}\right\}\left(\frac{a}{x}-1\right)}{\left(\frac{x^2}{a^{-3}}-\frac{a^2}{x^{-3}}\right)(a+x)^{-1}}=?$ Отв.: $a-x$

8) $\frac{\left\{a^0b^0-\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}\right)^{-1}\right\}\frac{(4a^m)^0}{(a^2+b^2)^{-1}}}{a^3\left[a^0b^0-\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\right](a-b)^{-1}-3\frac{b(x^{n-1}y)^0}{a^{-1}}}=?$ Отв.: 1.

9) $\frac{2bc}{a}\cdot\frac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{\left\{1+\frac{b}{a}+\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right\}^2}:\left|\frac{a^{-1}-\frac{(a^m+b^n)^0}{b+c}-\frac{a^0-b^0}{b+c}}{a^0b^0+\frac{\left\{1-\left(\frac{b}{c}\right)^{-2}-\frac{a^2}{b^2}\right\}b^2}{2\frac{a^0c}{b^{-1}}}}\right|^{-1}=?$

Отв.: $a$.

10) $\left\{\frac{\left(x^3-\frac{1}{y^{-3}}\right)y^{-2}}{(x^2-x^4y^{-2})x^0y^0}:\frac{\left\{\left(\frac{x+y}{x^2}\right)^{-1}+x^0y\right\}(x+y)}{\left[\frac{x}{y^{-2}}+\left(\frac{x^0}{y}\right)^{-3}\right](x-y)}\right\}:\frac{(2xy)^{-1}}{\frac{x}{2y}+\frac{y}{2x}+1}\cdot\left(y^{-2}-\frac{1}{x^2}\right)$

Отв.: $x+y$.

*Н. Карповъ* (Златополь).

---

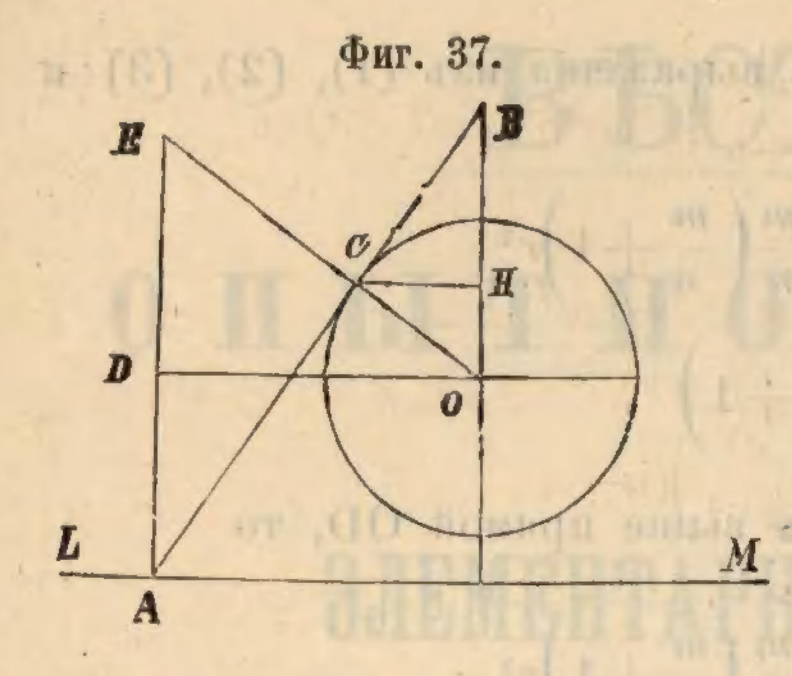
## РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 446.** Черезъ центръ даннаго круга проведена прямая перпендикулярно къ данной прямой; требуется провести къ кругу касательную такъ, чтобы отрѣзокъ ея между этими перпендикулярными прямыми дѣлился въ точкѣ касанія въ данномъ отношеніи.

Пусть черезъ центръ O даннаго круга (фиг. 37) проведена прямая BK перпендикулярно къ данной прямой LM, и пусть прямая AB, касающаяся круга въ точкѣ C, будетъ искомой касательной, такъ что

$$AC:CB=m:n,$$

Фиг. 37.




гдѣ $m:n$—данное отношеніе. Черезъ O и C проводимъ прямыя OD и CH параллельно къ LM; изъ A возставляемъ перпендикуляръ къ LM и продолжаемъ его до пересѣченія съ ЭC въ точкѣ E; если $OC=r$, $OK=a$ и $OH=x$, то мы изъ подобія прямоугольныхъ $\triangle$-ковъ OBC и AEC найдемъ:

$$EC:OC=m:n,$$

откуда

$$EC=\frac{mr}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

и

$$EO=EC+OC=\frac{(m+n)r}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Изъ подобія тѣхъ-же $\triangle$-ковъ имѣемъ

$$EA:OB=AC:CB=m:n,$$

откуда

$$EA=\frac{m.OB}{n}.$$

Замѣтивъ, что CH есть перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла C на гипотенузу OB, имѣемъ

$$OC^2=OB.OH \quad \text{и} \quad OB=\frac{r^2}{x},$$

подставивъ это въ выраженіе, полученное для EA, находимъ

$$EA=\frac{mr^2}{nx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

и

$$ED=EA-AD=EA-OK=\frac{mr^2-anx}{nx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Наконецъ, изъ подобія $\triangle$-ковъ прямоугольныхъ ODE и ACE

$$EO:AE=ED:EC,$$

откуда

$$EO.EC=AE.ED.$$

Подставивъ вмѣсто этихъ величинъ выраженія изъ (1), (2), (3) и (4), получимъ:

$$x=\mathrm{OH}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)r^2}}{2\left(\frac{m}{n}+1\right)}.$$

Если прямая LM пересѣкаетъ кругъ выше прямой OD, то

$$x=\mathrm{OH}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)r^2}}{2\left(\frac{m}{n}+1\right)}.$$

Оба знака передъ корнемъ удовлетворяютъ рѣшенію.

*А. Шульженко* (Кіевъ).

**№ 472.** Построить треугольникъ по основанію, углу при основаніи и отношенію двухъ другихъ сторонъ, не строя треугольниковъ подобныхъ искомому.

На произвольной прямой откладываемъ данное основаніе AB, при точкѣ A строимъ данный уголъ BAC; дѣлимъ основаніе AB въ точкѣ D въ данномъ отношеніи; изъ D, какъ изъ центра, описываемъ окружность, касающуюся стороны AC угла BAC; изъ B проводимъ касательную къ проведенной окружности; эта касательная пересѣкаетъ прямую AC въ точкѣ C: треугольникъ ABC—искомый. Доказательство очевидно. Рѣшеній 2, 1 или 0.

*А. Лентовскій* (Москва), *И. Солянииковъ* (Полтава) *Я. Эйлеръ* (Спб.), *В. Будянскій* (Кіевъ). Ученики: Курск. г. (6) *В. Х.* и (5) *И. З.*, Короч. г. (7) *П. П.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В.* и *Г. У.*, Пинск. р. уч. (6) *С. Т.*, Кам. р. уч. (7) *А. З.*, Т. Х. Шур. р. уч. (7) *А. Б.*

---

## Запоздалыя рѣшенія прислали:

*В. Россовская* (Курскъ) №№ 9, 32, *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ) № 33, *Н. Волковъ* (Спб.) №№ 342, 388, *А. Плетневъ* (Спб.) № 378, *И. Вонсикъ* и *А. Качанъ* (Воронежъ) № 515. Ученики: Курск. г. (5) *Н. Щ.* № 69, (5) *К. Щ.* №№ 9, 32, (8) *В. Г.* № 339, Кам.-Под. г. (8) *Я. М.* № 501.

---

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 13 Февраля 1891 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.